Καλές διατάξεις - Αρχή της υπερπεπερασμένης επαγωγής

Ορισμός: Έστω $(E, \leq)$ διατεταγμένο σύνολο. Το $(E, \leq)$ λέγεται καλά διατεταγμένο αν έχει την ιδιότητα κάθε μη κενό υποσύνολο του E να έχει ελάχιστο στοιχείο.

π.χ. Το $(\mathbb{N}, \leq)$ είναι καλά διατεταγμένο, το $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

η συνήθης διάταξη

Πρόταση: Κάθε καλά διατεταγμένο σύνολο είναι γραμμικά διατεταγμένο.

Απόδειξη: Έστω $(E, \leq)$ ένα καλά διατεταγμένο σύνολο
Θεωρούμε τυχαία $x, y \in E$. Το σύνολο $\{x, y\}$ έχει ελάχιστο στοιχείο. Αν $\min\{x,y\} = x$, τότε $x \leq y$
Αν $\min\{x,y\} = y$, τότε $y \leq x$

Παρατήρηση: (i) Κάθε καλά διατεταγμένο σύνολο έχει ελάχιστο στοιχείο.
(ii) Κάθε μη κενό υποσύνολο ενός καλά διατεταγμένου συνόλου είναι επίσης καλά διατεταγμένο.

Θεώρημα: (Αρχή της υπερπεπερασμένης επαγωγής)
Έστω $(E, \leq)$ καλά διατεταγμένο σύνολο κ' $A \subseteq E$
Αν $\forall y \in E$ ισχύει η εξής συνεπαγωγή $\{x \in E \ x < y\} \subseteq A \Rightarrow y \in A$, τότε $A = E$

Απόδειξη: Υποθέτουμε (προς επαγωγή σε άτοπο) ότι $A \neq E$, τότε θέτοντας $B = E - A$, έχουμε $B \neq \emptyset$. Εφόσον $(E, \leq)$ καλά διατεταγμένο το B έχει ελάχιστο στοιχείο. Θέτουμε $\beta = \min B$
$\forall x \in E$ με $x < \beta$, έχουμε $x \notin B$, άρα $x \in A$. Έτσι $\{x \in E, x < \beta\} \subseteq A$.
Από υπόθεση προκύπτει $\beta \in A$. Αυτό είναι άτοπο, διότι $\beta \in B = E - A$. Επομένως $A = E$

Ορισμός: Αν $(E, \leq), (E', \precsim)$ δύο μερικά διατεταγμένοι χώροι κ' $f: E \to E'$
→ Η f λέγεται αύξουσα αν $\forall x, y \in E \ (x \leq y \Rightarrow f(x) \precsim f(y))$
→ Η f λέγεται γνησίως αύξουσα αν $\forall x, y \in E \ (x < y \Rightarrow f(x) \prec f(y))$

Εφαρμογή: Έστω $(E, \leq)$ καλά διατεταγμένο σύνολο κ' $f: E \to E$ μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Τότε $\forall x \in E$ ισχύει $x \leq f(x)$

Απόδειξη: Θέτουμε $B = \{x \in E \ f(x) < x\}$ θδο $B = \emptyset$

(Αν το δ. αυτό, τότε εφόσον η $\leq$ καλή διάταξη είναι γραμμική θα ισχύει $x \leq f(x) \ \forall x \in E$)

Υποθέτουμε ότι $B \neq \emptyset$. Επειδή $(E, \leq)$ καλά διατεταγμένο το B να έχει ελάχιστο στοιχείο, θέτουμε $a = \min B$. Επειδή $a \in B$, ισχύει $f(a) < a$.

Επειδή η f είναι γν. αύξουσα προκύπτει $f(f(a)) < f(a)$. άρα $f(a) \in B$. Συνεπώς, αφού $a = \min B$ θα έχουμε $a \leq f(a)$. Αυτό είναι άτοπο αφού έχουμε ότι $f(a) < a$. Επομένως $B = \emptyset$, άρα $x \leq f(x), \forall x \in E$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν $(E, \leq) = (\mathbb{N}, \leq)$ οι φυσικοί με τη συνήθη διάταξη (που είναι καλά διατεταγμένο).
Αν $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μία γν. αύξουσα ακολουθία φυσικών
($k: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ γν. αύξουσα $k(n) = k_n$), τότε $n \leq k_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Έστω X ένα σύνολο κ' $\Phi: P(X) \to P(X)$ μία αύξουσα ως προς $\subseteq$ συνάρτηση.
(δηλαδή: $A \subseteq B \Rightarrow \Phi(A) \subseteq \Phi(B)$) ΝΔΟ η Φ έχει σταθερό σημείο, δηλαδή
$\exists D \in P(X)$, ώστε $\Phi(D) = D$

Απόδειξη: Θέτουμε $\mathcal{C} = \{A \subseteq X : A \subseteq \Phi(A)\}$
Καταρχάς, $\mathcal{C} \neq \emptyset$, αφού $\emptyset \in \mathcal{C}$
Θέτουμε $D = \cup \mathcal{C}$. ΝΔΟ $D = \Phi(D)$
$\forall A \in \mathcal{C} \to$ έχουμε $A \subseteq D$ άρα, αφού η Φ είναι αύξουσα θα ισχύει $\Phi(A) \subseteq \Phi(D)$)
$\to A \subseteq \Phi(A)$ (αφού $A \in \mathcal{C}$)

$A \subseteq \Phi(D)$

Έτσι $\forall A \in \mathcal{C}$ ισχύει $A \subseteq \Phi(D)$. άρα $\cup \mathcal{C} \subseteq \Phi(D)$.
δηλαδή $\boxed{D \subseteq \Phi(D)}$ (1)

$\xRightarrow{\Phi \nearrow} \Phi(D) \subseteq \Phi(\Phi(D))$ άρα $\Phi(D) \in \mathcal{C}$
άρα $\Phi(D) \subseteq \cup \mathcal{C}$ δηλαδή $\boxed{\Phi(D) \subseteq D}$ (2)
(1), (2) $\Rightarrow \boxed{\Phi(D) = D}$

Θεώρημα Knaster

Έστω $(A, \leq)$ ένα πεπερασμένο διατεταγμένο σύνολο με μέγιστο κ' ελάχιστο στοιχείο. Έστω επίσης $\phi: A \to A$ μια $\nearrow$ συνάρτηση. Τότε η ϕ έχει σταθερό σημείο (δηλαδή $\exists a \in A$ ώστε $\phi(a) = a$)

<u>Απόδειξη</u>: Θέτουμε $X = \{a \in A : x \leq \phi(x)\}$

Το σύνολο X είναι μη κενό επειδή $\min A \in X$

Επίσης το X είναι αφ (το $\max A$ είναι αφ του)

Αφού το $(A, \leq)$ είναι πεπερασμένο $\exists$ το $\sup X$.

Θέτουμε $a = \sup X$

$\forall y \in X$ ισχύει $\to y \leq \phi(y)$

$$\left.\begin{array}{l} \to y \leq a \xRightarrow[\phi \nearrow]{} \phi(y) \leq \phi(a) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{y \leq \phi(a)}$$

$\to$ Άρα το $\phi(a)$ είναι αφ του X.

Συνεπώς, αφού $a = \sup X$ έπεται ότι $\boxed{a \leq \phi(a)}$

Αφού η ϕ είναι $\nearrow$ έχουμε $\phi(a) \leq \phi(\phi(a))$

Άρα $\phi(a) \in X$ άρα $\phi(a) \leq \sup X \Rightarrow \boxed{\phi(a) \leq a}$

<u>Άσκηση</u>: Έστω σ μία σχέση σε ένα σύνολο E ώστε (i) σ μεταβατική (ii) $\forall x, y \in E$ $x \sigma y \Rightarrow y \not\sigma x$

Ν.δ.ο. η $r = \sigma \cup \Delta_E$ είναι σχέση διάταξης στο E

<u>Απάντηση</u>: $\Delta_E \subseteq \sigma \cup \Delta_E = r$, άρα <u>η r είναι ανακλαστική</u>

<u>r αντισυμμετρική</u>. Έστω $x, y \in E$ ώστε $x r y$ κ' $y r x$

κ' ν.δ.ο. $x = y$.

Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι $x \neq y$

δηλαδή $(x, y) \notin \Delta$ κ' $(y, x) \notin \Delta_E$ (1)

Δηλαδή $x \sigma y$. άρα από υπόθεση $y \not\sigma x$

δηλαδή $\underline{\underline{(y, x) \notin \sigma}}$ (2)

$(y, x) \notin \sigma \cup \Delta_E$

$(y, x) \notin r$, άτοπο

γ) μεταβατική

Έστω $x, y, z \in E$ με $(x,y)\in r$, $(y,z)\in r$

Αν $x=y$, τότε εφόσον $(y,z)\in r$ θα έχουμε $(x,z)\in r$.

→ Αν $y=z$, τότε εφόσον $(x,y)\in r$ προκύπτει $(x,z)\in r$

→ Αν $x\neq y$ κ' $y\neq z$, τότε

$$\left.\begin{array}{l}(x,y)\in r\\(x,y)\notin \Delta_E\end{array}\right\} \Rightarrow (x,y)\in \sigma$$

$$\left.\begin{array}{l}(y,z)\in r\\(y,z)\notin \Delta_E\end{array}\right\} \Rightarrow (y,z)\in \sigma$$

$\xrightarrow{\sigma \text{ μεταβατική}} (x,z)\in\sigma \Rightarrow (x,z)\in \sigma\cup\Delta_E \Rightarrow (x,z)\in r$

1) Στο $\mathbb{Z}$

$x\sigma y \Leftrightarrow 3x=2y$

αν; συμ; αντισυμ; μετ;

Δεν είναι αυτοπαθής αφού $1 \not\sigma 1$ (διότι $3\cdot 1\neq 2\cdot 1$)

Δεν είναι συμμετρική αφού $2\sigma 3$ ενώ $3\not\sigma 2$ (διότι $3\cdot 2=2\cdot 3$) (διότι $3\cdot 3\neq 2\cdot 2$)

Είναι αντισυμμετρική: Έστω $x,y\in\mathbb{Z}$ ώστε $x\sigma y$ κ' $y\sigma x$

$\Rightarrow 3x=2y$ κ' $3y=2x$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{3}y \\ 3y=2\left(\frac{2}{3}\right)y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{3}y \\ 9y=4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow x=y$$

Δεν είναι μεταβατική. Αρκεί:

Αναζητούμε $x,y,z\in\mathbb{Z}$ ώστε

$$\left.\begin{array}{l}x\sigma y\\ y\sigma z\\ x\not\sigma z\end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l}3x=2y\\ 3y=2z\\ 3x\neq 2z\end{array}$$

Για $x=4$, $y=6$, $z=9$ έχουμε τα παραπάνω άρα η σ ΔΕΝ είναι μεταβατική

2) Στο σύνολο $\mathbb{N}$ ορίζουμε σχέση σ ως εξής $x\sigma y \iff \exists k \in \mathbb{N}\ x^2 = ky$
$\left(\iff \frac{x^2}{y} \in \mathbb{N}\right)$

αυτ; συμ; αντισυμ; μετ;

Η σ είναι αυτοπαθής: Για $x \in \mathbb{N}$ παίρνοντας $k = x \in \mathbb{N}$ έχουμε $x^2 = kx$
άρα $x\sigma x$

[με άλλα λόγια $\forall x \in \mathbb{N}\ \frac{x^2}{x} = x \in \mathbb{N}$]

Η σ δεν είναι συμμετρική: $4\sigma 1$ (διότι $\frac{4^2}{1} = 16 \in \mathbb{N}$)
ενώ $1 \not\sigma 4$ (διότι $\frac{1^2}{4} = \frac{1}{4} \in \mathbb{N}$)

Η σ δεν είναι αντισυμμετρική: $4\sigma 2$ διότι $\frac{4^2}{2} = 8 \in \mathbb{N}$)
$2\sigma 4$ (διότι $\frac{2^2}{4} = 1 \in \mathbb{N}$) ενώ $2 \neq 4$

Η σ δεν είναι μεταβατική:
αφού $2\sigma 4$ (διότι $\frac{2^2}{4} = 1 \in \mathbb{N}$)
$4\sigma 8$ (διότι $\frac{4^2}{8} = 2 \in \mathbb{N}$)
$2 \not\sigma 8$ (διότι $\frac{2^2}{8} = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$)

3) σ σχέση στο E. Νδο η σ είναι μερική διάταξη $\iff \Delta_E = \sigma \cap \sigma^{-1}$
κ' $\sigma \circ \sigma \subseteq \sigma$

$\Rightarrow$) Αν η σ είναι μερική διάταξη τότε η σ είναι αυτοπαθής, αντισυμμετρική κ' μεταβατική. άρα $\Delta_E \subseteq \sigma$ $\quad \sigma \cap \sigma^{-1} \subseteq \Delta_E$ $\quad \sigma \circ \sigma \subseteq \sigma$

Για νδο $\Delta = \sigma \cap \sigma^{-1}$ αρκεί νδο $\Delta_E \subseteq \sigma \cap \sigma^{-1}$
Αν $(x,y) \in \Delta_E$ τότε $x = y$ κ' $y = x$
άρα αφού σ αυτοπαθής $(x,y) \in \sigma$ κ' $(y,x) \in \sigma \Rightarrow$
$\Rightarrow (x,y) \in \sigma \Rightarrow (x,y) \in \sigma \cap \sigma^{-1}$
$(x,y) \in \sigma^{-1}$

Επομένως $\Delta_E \subseteq \sigma \cap \sigma^{-1}$ κ' $\sigma \cap \sigma^{-1} = \Delta_E$ έχουμε $\Delta_E = \sigma \cap \sigma^{-1}$

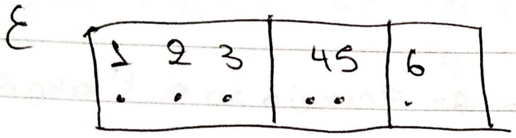
⇐) Υποθέτουμε ότι $\Delta_E = \sigma\cap\sigma^{-1}$ κ' $\sigma\circ\sigma \subseteq \sigma$. Επειδή $\sigma\circ\sigma \subseteq \sigma$ η σ είναι μεταβατική

$$\Delta_E = \sigma\cap\sigma^{-1} \subseteq \sigma$$

άρα η σ είναι ανακλαστική

Επίσης (με δεδομένο ότι μια σχέση σ είναι αντισυμμετρική αν $\sigma\cap\sigma^{-1} \subseteq \Delta_E$): η σ είναι αντισυμμετρική

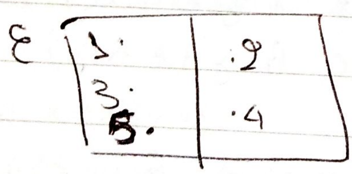
4) Στο σύνολο $E=\{1,2,3,4,5,6\}$ να οριστεί η σχέση ισοδυναμίας ~ η οποία να έχει τρεις κλάσεις ισοδυναμίας με διαφορετικό πλήθος στοιχείων η καθεμία



Απάντηση: Να ορίσουμε μια σχέση ισοδυναμίας ~ στο E της οποίας οι κλάσεις ισοδυναμίας θα είναι $\{1,2,3\}, \{4,5\}, \{6\}$

$\sim = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(4,4),(4,5),(5,4),(5,5),(6,6)\}$.

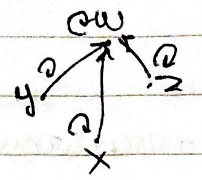
5) Να οριστεί σχέση ισοδυναμίας ~ στο σύνολο $E=\{1,2,3,4,5\}$ η οποία να έχει δύο κλάσεις ισοδυναμίας κ' να κάνει $x \nsim x+1$ για $x=1,2,3,4$



$\sim = \{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5),(2,2),(2,4),(4,2),(4,4)\}$

6) Να οριστεί σχέση μερικά διατεταγμένη στο $E=\{x,y,z,\omega\}$ η οποία να έχει μέγιστο κ' ελάχιστο στοιχείο κ' να μην είναι γραμμική (ολική)

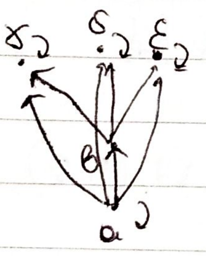
Απάντηση:



Α ορίζουμε $\leq\ = \{(x,x),(y,y),(z,z),(\omega,\omega),$
$(x,y),(x,z),(x,\omega),(y,\omega),(z,\omega)\}$

Η $\leq$ είναι ανακλαστική, αντισυμμετρική κ' μεταβατική άρα είναι μερική διάταξη.
Έχει μέγιστο στοιχείο το ω κ' ελάχιστο στοιχείο το x.
Η $\leq$ δεν είναι γραμμική διάταξη, διότι δεν ισχύει $y\leq z$ ούτε $z\leq y$.

7) Στο $A=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\}$
να οριστεί μία σχέση διάταξης $\leq$ με ελάχιστο στοιχείο το α κ' ακριβώς τρία maximal (μεγιστικά ή μεγαλομέγιστα) τα $\gamma,\delta,\varepsilon$



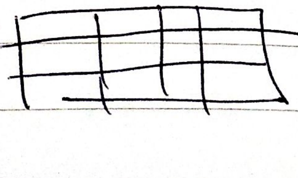
Ορίζουμε
$\leq\ = \{(\alpha,\alpha),(\beta,\beta),(\gamma,\gamma),(\delta,\delta),(\varepsilon,\varepsilon),$
$(\alpha,\beta),(\alpha,\gamma),(\alpha,\delta),(\alpha,\varepsilon),$
$(\beta,\gamma),(\beta,\delta),(\beta,\varepsilon)\}$

Η $\leq$ είναι σχέση διάταξης (ανακλαστική, αντισυμμετρική κ' μεταβατική)
έχει ελάχιστο στοιχείο το α (διότι $\alpha\leq\alpha, \alpha\leq\beta, \alpha\leq\gamma, \alpha\leq\delta, \alpha\leq\varepsilon$)
Τα $\gamma,\delta,\varepsilon$ είναι maximal στοιχεία (π.χ. για το γ, αν $x\in A$ κ' $\gamma\leq x$ τότε $x=\gamma$.) Το β δεν είναι maximal (διότι $\beta\leq\gamma$ με $\beta\neq\gamma$)

9) Δίνονται δύο σχέσεις ισοδυναμίας σ κ' ρ σε ένα σύνολο E
(i) νδο η $\sigma\cap\rho$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο E

(ii) $\forall x\in E$ νδο $[x]_{\sigma\cap\rho}=[x]_\sigma\cap[x]_\rho$

E



(i) $\sigma\cap r$ ανακλαστική

$\forall x\in E$ ισχύει $(x,x)\in\sigma$ αφού σ ανακλαστική κ' $(x,x)\in r$ αφού r ανακλαστική άρα $(x,x)\in\sigma\cap r$

$\sigma\cap r$ συμμετρική

Έστω $x,y\in E$ ώστε $(x,y)\in\sigma\cap r$

$$\Rightarrow \begin{cases}(x,y)\in\sigma\\(x,y)\in r\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(y,x)\in\sigma\\(y,x)\in r\end{cases} \Rightarrow (y,x)\in\sigma\cap r.$$

$\sigma\cap r$ μεταβατική

Έστω $x,y,z\in E$ με $\left.\begin{matrix}(x,y)\in\sigma\cap r\\(y,z)\in\sigma\cap r\end{matrix}\right\}$

$$\left.\begin{matrix}(x,y)\in\sigma\\(x,y)\in r\\(y,z)\in\sigma\\(y,z)\in r\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\sigma,r\ \text{μεταβατική}} \left.\begin{matrix}(x,z)\in\sigma\\(x,z)\in r\end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow (x,z)\in\sigma\cap r$$

Επομένως η $\sigma\cap r$ είναι σχέση ισοδυναμίας.

(ii) Έστω $x\in E$ θα βρούμε την κλάση ισοδυναμίας του x ως προς τη σχέση ισοδυναμίας $\sigma\cap r$

Για τυχόν y

$y\in[x]_{\sigma\cap r} \Leftrightarrow (x,y)\in\sigma\cap r$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x,y)\in\sigma\\(x,y)\in r\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y\in[x]_\sigma\\y\in[x]_r\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y\in[x]_\sigma\cap[x]_r$$

Επομένως $[x]_{\sigma\cap r}=[x]_\sigma\cap[x]_r$